Capítulo II: Diferenciación

Profesores: Gladys Figueroa Rebolledo, y
Raúl Fierro Pradenas.

1. Derivadas Parciales

Definición 1 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $a \in D$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\eta\| = 1$ y $f : D \to \mathbb{R}$. La derivada direccional de f en a en la dirección η, se define (cuando existe) como

$$(1.1) \qquad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[f(a + h\eta) - f(a)].$$

Observación 2 Para fijar ideas, mantengamos las notaciones de la definición precedente, pero fijemos $n = 2$.

En este caso, la derivada direccional de f en (a, b) en la dirección η, es la pendiente de la recta ℓ tangente a la superficie representada por Figura 2.1, en la dirección del vector η.

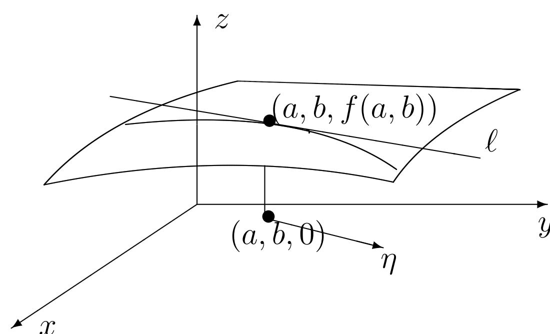


Figura 2.1

Ejemplo 3 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial \eta}(0, 1)$, donde

$\eta = (\sqrt{3}/2, 1/2)$.

Definición 4 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $a \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}$. La derivada parcial de f en a con respecto a la k-ésima variable, se define (cuando existe) como

(4.1) $$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{e}_k}(a),$$

donde $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ son los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Observación 5 Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$, entonces con las notaciones de la definición precedente, se tiene

(5.1) $$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[f(a_1, \ldots, a_k, a_k + h, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)].$$

Luego, para calcular $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, simplemente se deriva f respecto de la k-ésima variable manteniendo constante las restantes y evaluando esta derivada en a.

Definición 6 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $a \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}$ tal que existen sus derivadas parciales en a. El gradiente de f en a (el cual anotaremos $\nabla f(a)$) es el vector de $\mathbb{R}^n$ formado por las derivadas parciales de f en a; es decir,

(6.1) $$\nabla f(a) = (\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)).$$

Ejemplos 7

(7.1) Calcular $\frac{\partial f}{\partial \eta}(1, 0)$ si $f(x, y) = \tan(xy)$ y $\eta = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

(7.2) Calcular $\nabla f(0, 0)$ si

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Observación 8 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ tal que existen $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ para todo $(a, b) \in D$. Luego, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones de D en $\mathbb{R}$.

En el caso que exista $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, anotaremos

(8.1) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a, b).$$

Análogamente se define

(8.2) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a, b),$$

(8.3) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a, b),$$

(8.4) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)$.

Ejemplos 9

(9.1) Sea $f(x,y) = x^2y + (x+y)^2$. Calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y notar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b).$$

(9.2) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y notar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

Teorema 10 Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a \in D$. Supongamos además que f, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ existen y son continuas en V para alguna $V \in \mathcal{V}(a)$. Entonces,

(10.1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Definición 11 Si una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisface los supuestos del teorema precedente, se dice que f es de clase C^2.

Ejercicios propuestos

1. En cada uno de los casos siguientes, calcule $\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,y)$ para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y η dados.

(1.1) $f(x,y) = x + y$, $\eta = (1,0)$.
(1.2) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$, $\eta = (0,1)$.
(1.3) $f(x,y) = x + y$, $\eta = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$
(1.4) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$, $\eta = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

Respuestas: (1.1) 1. (1.2) $x\cos(xy)$.
(1.3) $\sqrt{2}$. (1.4) $(\sqrt{3}x + y)\cos(xy)/2$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) = xyz$. Calcule la derivada direccional de f en $(1,2,3)$, en la dirección que va desde este punto al punto $(3,1,5)$.

Respuesta: 13/3.

3. Sea $f(x,y) = xy\tan(y/x)$. Demuestre que en su dominio, la función f satisface la ecuación siguiente:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f.$$

4. Se dice que una función $u : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisface la ecuación de Laplace (notación: $\triangle u = 0$), si y sólo si, para todo $a \in D$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1}(a) + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n}(a) = 0$.

Demuestre que en los casos siguientes, la función u dada satisface la ecuación de Laplace en su dominio.

(4.1) $u(x,y) = \ln(1/\sqrt{x^2+y^2})$. (4.2) $u(x,y,z) = 1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(4.3) $u(x,y) = \mathrm{e}^x\cos(y)$. (4.4) $u(x,y) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{sen}(y)$.

(4.5) $u(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y^2}\,\mathrm{sen}(2xy)$. (4.6) $u(x,y,z) = \ln(x^2+y^2)$.

5. Suponga que existe una función $z = z(x,y)$ que satisface la ecuación que se menciona en cada caso. Encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

(5.1) $x^3 + y^3 + z^3 + \mathrm{sen}(xz) + \cos(yz) = 15$.

(5.2) $e^z + x^2\ln(z) + y = 0$.

Respuestas: (5.1) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2+z\cos(xz)}{3z^2+x\cos(xz)-y\,\mathrm{sen}(yz)}$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z\,\mathrm{sen}(yz)-3y^2}{3z^2+x\cos(xz)-y\,\mathrm{sen}(yz)}$.

(5.2) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz\ln(z)}{ze^z+x^2}$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{ze^z+x^2}$.

6. Suponga que existen funciones $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ que satisfacen las ecuaciones $u\cos(v) = x+1$ y $u\,\mathrm{sen}(v) = x+y$. Encontrar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Respuestas: $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(v) + \mathrm{sen}(v)$,
$\frac{\partial v}{\partial x} = (\cos(v) - \mathrm{sen}(v))/u$,
$\frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{sen}(v)$ y
$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(v)/u$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}\operatorname{sen}(xy) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ y & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

(7.1) Calcule (si existen) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$.

(7.2) Determine si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1)$.

Respuestas: (7.1) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 1$. (7.2) No.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}\operatorname{sen}(x^2) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Calcule (si existen) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$.

Respuesta: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^4}{(x-1)^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

Calcule (si existen)

(9.1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(9.2) $\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ donde $\eta = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

(9.3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0)$.

Respuesta: (9.1) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$, y si $(x,y) \neq (1,0)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2(x-1)^5+4y^2(x-1)^3}{((x-1)^2+y^2)^2} \text{ y } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2y(x-1)^4}{((x-1)^2+y^2)^2}.$$

(9.2)

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}(x-1)^3[(x-1)^2+2y^2-y(x-1)]}{((x-1)^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

(9.3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0) = 0$.

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(10.1) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(10.2) Determine si $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0,0)$.

(10.3) Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Respuestas: (10.1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^3-2x^5y}{(x^4+y^2)^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, y $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

(10.2) No.

(10.3) 0.

2. Diferenciabilidad

En lo que sigue, $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ denotarán los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Observación 1 Sean $D \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto, $a \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}$.

Sabemos que f es diferenciable en a, si y sólo si, existe

(1.1) $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Esta condición es equivalente a que exista $f'(a) \in \mathbb{R}$ tal que

(1.2) $\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h)-f(a)-f'(a)h|}{|h|} = 0$.

A su vez, la condición (1.2) equivale a decir que existe una transformación lineal $\mathrm{D}f(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

(1.3) $\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h)-f(a)-\mathrm{D}f(a)(h)|}{|h|} = 0$.

Esta última condición motiva la definición siguiente:

Definición 2 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $a \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f es diferenciable en a, si y sólo si, existe una transformación lineal $\mathrm{D}f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

tal que

(2.1) $\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-\mathrm{D}f(a)(h)\|}{\|h\|} = 0.$

Denotaremos por $f'(a)$ la matriz asociada a $\mathrm{D}f(a)$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Esta matriz se conoce como matriz jacobiana de f en a.

Observaciones 3 Es importante notar que con las notaciones de la definición precedente,

(3.1) $f'(a)$ es una matriz de orden $m \times n$,

(3.2) la transformación lineal $\mathrm{D}f(a)$ es única, y

(3.3) para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathrm{D}f(a)\mathrm{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Ejemplos 4

(4.1) Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $a \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función constante. Luego $\mathrm{D}f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es la transformación lineal nula.

(4.2) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces para todo $a \in D$, $\mathrm{D}f(a) = f$.

Proposición 5 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $a \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|h\| = 1$ y $f : D \to \mathbb{R}$ diferenciable en a. Entonces,

(5.1) $\frac{\partial f}{\partial \eta}(a) = \mathrm{D}f(a)\eta.$

Observaciones 6 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $a \in D$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\eta\| = 1$ y $f : D \to \mathbb{R}$ diferenciable en a.

Como $\eta = (\eta \bullet \mathrm{e}_1)\mathrm{e}_1 + \cdots + (\eta \bullet \mathrm{e}_n)\mathrm{e}_n$, sigue de (5.1) y (3.3) que

(6.1) $\frac{\partial f}{\partial \eta}(a) = \nabla f(a) \bullet \eta.$

Por (6.1) y la desigualdad de Cauchy- Schwarz, la derivada direccional de la función f en a es máxima en la dirección de su gradiente. Además, este valor máximo es igual a $\|\nabla f(a)\|$.

Proposición 7 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $a \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}^m$ tal que $f = (f_1, \dots, f_m)$, donde para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i es una función de D en $\mathbb{R}$.

Supongamos además que f es diferenciable en a. Entonces,

$$(7.1) \qquad f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 8 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x^2 - y, y^2 + z^2)$. Encontrar $f'(1, 1, 1)$ y $\mathrm{D}f(1, 1, 1)$.

Teorema 9 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $a \in D$. Si $f : D \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en a, entonces f es continua en a.

Teorema 10 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $a \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}^m$ tal que $f = (f_1, \ldots, f_m)$, donde para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es una función de $Den\mathbb{R}$. Supongamos además que para todo $(i, j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$, existe $\delta > 0$ de modo que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existe y es continua en la bola $\mathrm{B}(a, \delta)$. Entonces, f es diferenciable en a.

Observación 11 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $a \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}^m$ tal que $f = (f_1, \ldots, f_m)$, donde para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i es una función de D en $\mathbb{R}$. Consideremos las tres condiciones siguientes:

(11.1) Para todo $(i, j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$, existe $\delta > 0$ de modo que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existe y es continua en la bola $\mathrm{B}(a, \delta)$.

(11.2) f es diferenciable en a.

(11.3) f es continua en a.

De acuerdo a los dos últimos teoremas, se tiene la cadena de implicancias siguiente:

$$(11.1) \Rightarrow (11.2) \Rightarrow (11.3).$$

Sin embargo, como veremos a continuación, no se satisface los recíprocos de estas implicancias.

Ejemplos 12

(12.1) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Verificar que f es continua en $(0, 0)$, que sus derivadas parciales existen en $(0, 0)$, pero que f no es diferenciable

en $(0,0)$.

(12.2) Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}(1/\sqrt{x^2+y^2}) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Probar que f es diferenciable en $(0,0)$, pero que sus derivadas parciales no son continuas.

Teorema 13 Sean D abierto en $\mathbb{R}^n$, $a \in D$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Supongamos además que f y g son funciones de D en $\mathbb{R}^m$ diferenciables en a. Luego,

(13.1) αf es diferenciable en a y $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$.

(13.2) $f+g$ es diferenciable en a y $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

(13.3) si $m=1$, entonces fg es diferenciable en a y

$$(fg)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a).$$

(13.4) si $m=1$ y $g(a) \neq 0$, entonces f/g es diferenciable en a y

$$(f/g)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Ejemplo 14 Sea $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $h(x,y) = \frac{x^2y}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y}$. Calcular $h'(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicios propuestos

1. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\mathrm{sen}(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determine si f es diferenciable en $(0,0)$.

Respuesta: No.

2. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi(x-y)}{2(x+y)}\right) & \text{si} \quad y \neq -x \\ 0 & \text{si} \quad y = -x. \end{cases}$$

(2.1) Calcule (si existen) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

(2.2) Determine si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

(2.3) Determine si f es diferenciable en $(0,0)$.

Respuestas: (2.1) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. (2.2) No. (2.3) Sí.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Demuestre que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existen y son continuas para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

Respuesta: Sí.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^2-3xy-5x^2}{x+y} & \text{si} \quad x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x+y = (0,0). \end{cases}$$

(4.1) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ si $x+y \neq 0$.

(4.2) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

(4.3) Determine si f es diferenciable en $(0,0)$.

(4.4) ¿Existen las derivadas parciales de f en alguna vecindad de $(0,0)$?

Respuestas:
(4.1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -5$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2$.
(4.2) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -5$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2$.
(4.3) Sí.
(4.4) No.

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x)\| \leq \|x\|^2$. Demuestre que f es diferenciable en 0.

6. Para cada una de las funciones dadas, encuentre $f'(a)$.

(6.1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y)=(xy^2-3x^3,3x-5y^2)$, $a=(1,-2)$.

(6.2) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z)=(xy,x+y+z)$, $a=(1,-1,3)$.

(6.3) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y)=(x/y,x+y,xy)$, $a=(1,-1)$.

Respuestas: (6.1) $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 20 \end{pmatrix}$. (6.2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(6.3) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Para cada una de las funciones siguientes, encuentre su derivada en cada punto de su dominio.

(7.1) $f(x,y)=(x,x+y)$. (7.2) $f(x,y,z)=(x+y^2+z,\cos(x+y),z^2)$.

(7.3) $f(x,y)=(x^y,\ln(x/y))$. (7.4) $f(t)=(t,t\operatorname{sen}(t),t\cos(t))$.

Respuestas: (7.1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(7.2) $\begin{pmatrix} 1 & 2y & 1 \\ -\operatorname{sen}(x+y) & -\operatorname{sen}(x+y) & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}$.

(7.3) $f(x,y)=(x^y,\ln(x/y))$.

(7.4) $f(t)=(t,t\operatorname{sen}(t),t\cos(t))$.

8. Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua. Encuentre en los casos siguientes la matriz jacobiana de $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ en cada punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(8.1) $f(x,y)=(\int_0^{x+y} g(t)\,\mathrm{d}t,\int_y^x g(t)\,\mathrm{d}t)$.

(8.2) $f(x,y)=(\int_1^{xy} g(t)\,\mathrm{d}t,\int_0^{u(x,y)} g(t)\,\mathrm{d}t)$, donde $u(x,y)=\int_y^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

Respuestas: (8.1) $\begin{pmatrix} g(x+y) & g(x+y) \\ g(x) & -g(y) \end{pmatrix}$.

(8.2) $\begin{pmatrix} yg(xy) & xg(xy) \\ g(x)g(u(x,y)) & -g(y)g(u(x,y)) \end{pmatrix}$.

9. Encuentre una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y & x^3 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}.$$

Respuesta: $f(x, y) = (x^3y, x^2 + y)$.

10. Encuentre una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & -2y & 1 \end{pmatrix}.$$

Respuesta: $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x - y^2 + z)$.

3. Regla de la cadena

Teorema 1 Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ tales que f es diferenciable en $a \in D$ y g es diferenciable en $f(a)$. Entonces, $g \circ f$ es diferenciable en a y además

(1.1) $\mathrm{D}(g \circ f)(a) = \mathrm{D}g(f(a)) \circ \mathrm{D}f(a)$.

Observación 2 Bajo los supuestos del teorema precedente, se tiene

(2.1) $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Ejemplos 3

(3.1) Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dos funciones definidas por

$$f(x, y) = (x^2, x + y, x) \text{ y } g(x, y, z) = (xy, yz).$$

Encontrar $(g \circ f)'(1, 2)$.

(3.2) Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables tales que $f(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z))$ y $h = g(u, v)$. Determinar $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$ $\frac{\partial h}{\partial z}$ en función de las derivadas parciales de f y g.

Observación 4 Sean $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable e $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Supongamos además que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i = g_i(t_1, \ldots, t_m)$. Entonces,

(4.1) $\frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Supongamos ahora que para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$, $t_j = h_j(r_1, \ldots, r_l)$. Entonces,

(4.2) $\frac{\partial y}{\partial r_k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \frac{\partial t_j}{\partial r_k}$, $k \in \{1, \ldots, l\}$.

Por lo tanto, la fórmula (4.2) proporciona una regla nemotécnica para calcular derivadas parciales de funciones compuestas.

Definición 5 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : D \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f es de clase C^p en D, si y sólo si, existen las p-ésimas derivadas parciales de f en D y son continuas.

Ejemplos 6

(6.1) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(t) = f(t, t)$ donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $(1, 1)$ y satisface $f'(1, 1) = (2 \quad 1)$. Determinar $h'(1)$.

(6.2) Si $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 que satisface la ecuación (de Laplace)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Demuestre que $w = u(\rho \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\theta))$ satisface la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0.$$

Ejercicios propuestos

1. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y $w = f(x, y)$, donde $x = \rho \cos(\theta)$ e $y = \rho \operatorname{sen}(\theta)$. Calcule

(1.1) $\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$. (1.2) $\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}$. (1.3) $\frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \theta}$.

Respuestas: (1.1) $\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = u(\rho,\theta) + v(\rho,\theta)$, donde

$u(\rho,\theta) = -\rho\cos(\theta)\frac{\partial w}{\partial x} - \rho\,\text{sen}(\theta)\frac{\partial w}{\partial y} + \rho^2\,\text{sen}^2(\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ y

$v(\rho,\theta) = -\rho^2[\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \text{sen}(2\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}]$.

(1.2) $\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} = \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \text{sen}(2\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \text{sen}^2(\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

(1.3) $\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = u(\rho,\theta) + v(\rho,\theta)$, donde

$u(\rho,\theta) = -\rho\cos(\theta)\frac{\partial w}{\partial x} - \rho\,\text{sen}(\theta)\frac{\partial w}{\partial y} + \rho^2\,\text{sen}^2(\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ y

$v(\rho,\theta) = -\rho^2[\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \text{sen}(2\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}]$.

2. Sean A, B, C y D constantes reales, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(u,v) = f(Au + Bv, Cu + Dv)$. Suponga además que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Encuentre los valores de A, B, C y D tales que $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$.

Respuesta: $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$ y $D = -3$.

3. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x,y) = f(2x - y, x + 2y)$. Si $u = 2x - y$ y $v = x + 2y$, determine el valor de $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$k\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.$$

Respuesta: 25.

4. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $f(x,y,z) = (\cos(xz), xy + z, xyz, y)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ diferenciable y tal que $g'(1,-1,0,-1) = (0,-1,-1.-1)$.

Respuestas: (4.1) $\begin{pmatrix} z\,\text{sen}(xz) & 0 & -x\,\text{sen}(xz) \\ y & x & 1 \\ yz & xz & xy \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (4.2) $(1,-2,0)$.

5. Sean f y g funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dos veces diferenciables y $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $z(x, y) = f(x + ay) + g(x - ay)$. Demuestre que

$$a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) = 2$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) = 1$. Si $x = u + v$, $y = uv$ y $w = f(x, y)$, calcule $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}(1,1)$.

Respuesta: 25.

7. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable y $z = xyf(\frac{x+y}{xy})$. Demuestre que

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = (x - y)z.$$

8. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y $z = f(u - v, u + v)$. Demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 2(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2})$$

9. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y $w = f(\rho \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\theta))$. Demuestre que

$$(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 = (\frac{\partial w}{\partial \rho})^2 + \frac{1}{\rho^2}(\frac{\partial w}{\partial \theta})^2.$$

10. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables y $w = f(t^2, g(t,t), \operatorname{sen}(t))$. Calcule $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ en función de las derivadas parciales de f y g.

Respuesta: $2t\frac{\partial f}{\partial x} + (\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y})\frac{\partial f}{\partial y} + \cos(t)\frac{\partial f}{\partial z}$.

11. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(t) = f(t, f(t, f(t,t)))$ donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $(1,1)$ y satisface $f(1,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = a$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = b$. Determine $h(1)$ y $h'(1)$.

Respuesta: 1 y $a + ab + ab^2 + b^3$.

12. Sean A y B constantes reales y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y tal que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f'(x, y)$ no es la matriz nula. Si $z = f(x, y)$ es una solución de $f(x + y + z, Ax + By) = 0$, demuestre que

$$A\frac{\partial z}{\partial y} - B\frac{\partial z}{\partial x} = B - A.$$

4. Aplicaciones geométricas

Curvas 1 Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Una curva en $\mathbb{R}^n$, es una función $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Supongamos que α es diferenciable en t^* ($a < t^* < b$). Entonces existe

(1.1) $T(t^*) = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(t^*+h)-\alpha(t^*)}{h}$.

Nótese que $T(t^*)$ se puede identificar con $\alpha'(t^*)$, pues $\alpha'(t^*)$ es el vector de coordenadas de $T(t^*)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Además, $\mathrm{D}\alpha(t^*)h = hT(t^*)$.

Dada una curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, se dice que α es cerrada, si y sólo si, $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Ejemplo 2 Una circunferencia en $\mathbb{R}^2$ con centro en (a, b) y radio $r > 0$, puede ser representada mediante la curva $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (r\cos(t) + a, r\,\mathrm{sen}(t) + b).$$

Encontrar un vector tangente a la circunferencia en el punto $(a + r, b)$.

Observación 3 Sean $C \in \mathbb{R}$ y $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que el conjunto

(3.1) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = C\}$ es una superficie. Entonces, para todo $(a, b, c) \in S$, $\nabla f(a, b, c)$ es un vector normal a la superficie S.

Ejemplos 4

(4.1) Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1, 2)$.

(4.2) Calcular aproximadamente $\sqrt{x^2 + y^2}$ si $x = 2,9$ e $y = 4,2$.

Ejercicios propuestos

1. Encuentre vectores tangentes y normales a las curvas siguientes:

(1.1) $x^2 + y^2 = 10$ en $(1, 3)$. (1.2) $\arctan(xy) = \pi/4$ en $(1, 1)$.

Respuestas: (1.1) $(3, -1)$ y $(1, 3)$, resp. (1.2) $(1, -1)$ y $(1, 1)$, resp.

2. Determine $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ($a < b$), tal que para todo $t \in [a, b]$, $\alpha(t) \in S$ en los casos siguientes:

(2.1) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 3\}$.

(2.2) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 36\}$.

Respuestas: (2.1) $(3t, 1 - 2t)$. (2.2) $(3\cos(t), 2\,\text{sen}(t))$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = z\}$ es una superficie.

(3.1) Demuestre que para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -1)$ es un vector normal a la superficie en $(a, b, f(a, b))$.

(3.2) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie en $(a, b, f(a, b))$.

(3.3) Determine dos puntos que pertenezcan a la recta normal a S en $(a, b, f(a, b))$.

Respuestas: (3.2) $(x - a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = z - f(a, b)$.

(3.3) $(a, b, f(a, b))$ y $(a + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), b + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), f(a, b) - 1)$.

4. Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie dada por la ecuación $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 1)$ para cada una de las funciones siguientes:

(4.1) $f(x, y) = x/y$. (4.2) $f(x, y) = \arctan(y/x)$.
(4.3) $f(x, y) = \ln(1/\sqrt{x^2 + y^2})$ (4.4) $f(x, y) = 2xy + y^2$.

Respuestas: (4.1) $x - y - z = -1$. (4.2) $x - y + z = \pi/4$.
(4.3) $x + y + 2z = 2 - \ln(2)$. (4.4) $2x + 4y - z = 3$.

5. Encuentre la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ en el punto $(1, 2, 3)$.

Respuesta: $x + 2y + 3z = 14$.

6. Encuentre la ecuación del plano tangente en el punto $(2, 4, 1)$ a la esfera de ecuación $(x - a)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 27$.

Respuesta: $2x - 10y + 2z = -34$.

7. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 - xy = \operatorname{sen}(z)$$

en el punto $(0, 0, 0)$.

Respuesta: $z = 0$.

8. Encuentre el ángulo entre los planos tangentes a las superficies de ecuaciones $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3\sqrt{a}$ y $z = -2x^2 + 2xy + a$, en el punto (a, a, a), $(a > 0)$.

Respuesta: $\arccos(1/\sqrt{3(8a^2 + 1)})$

9. Sea $\lambda > 0$. Demuestre que la suma de los interceptos en los ejes coordenados de cualquier plano tangente a la superficie de ecuación $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} = \sqrt{\lambda}$ es constante.

10. El período de un péndulo está dado por $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Aproxime el error que se comete al calcular el período si la longitud l se toma como $8 \pm 0,01$ pies en vez de 8 *pies*, y el valor de g se tomó como 32 *pies/seg*^{2} en lugar del correcto de 31,8.

Respuesta: $\pi/1600$.

11. Dos lados de un triángulo miden 12 y 15 *pies*, y el ángulo que forman es de 60°. Si las longitudes de los lados se pueden medir con una precisión del 1 % y el ángulo con una precisión del 2 %, encuentre los errores máximos al calcular

(11.1) el área. (11.2) el lado opuesto del triángulo.

Respuestas: (11.1) $2,501$ *pies*^{2}. (11.2) $0,287$ *pies*.

12. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = xy$. Demuestre que la dirección del gradiente de f es siempre perpendicular a la curva $xy = c$.

5. Funciones inversas e implícitas

Definición 1 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $a \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en a. El jacobiano de f en a se define como

(1.1) $J_f(a) = \det f'(a)$.

Notación 2 Si $a \in \mathbb{R}^n$ y $T = (T_1, \ldots, T_n)$ es una función diferenciable de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, anotaremos

(2.1) $J_T(a) = \frac{\partial(T_1,\ldots,T_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$.

Observación 3 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $a \in D$ y $T : D \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en a. Supongamos que existe T^{-1} y que es diferenciable en $\mathrm{T}(a)$. Entonces,

(3.1) $J_{T^{-1}}(T(a)) = \frac{1}{J_T(a)}$.

Ejemplo 4 Sean $u(x, y) = x^2 + y^2$ y $v(x, y) = x^2 - y^2$. Calcular $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ y $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

Teorema 5 (De la Función Inversa.) Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $a \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en D. Supongamos además que $J_f(a) \neq 0$. Entonces, existe $r > 0$ tal que

(5.1) la restricción $f_{|\mathrm{B}(a,r)}$ de f a $\mathrm{B}(a, r)$ es inyectiva,

(5.2) $f(\mathrm{B}(a, r))$ es abierto, y

(5.3) la función inversa $g : f(\mathrm{B}(a, r)) \to \mathrm{B}(a, r)$ de $f_{|\mathrm{B}(a,r)}$ es de clase C^1 en $\mathrm{B}(a, r)$ y $g'(f(a)) = f'(a)^{-1}$.

Observaciones 6

(6.1) Puede ocurrir que f tenga inversa y sin embargo $J_f(a) = 0$ para algún a. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ y $a = 0$.

(6.2) Si $J_f(a) = 0$ y f posee una inversa local en torno de a, entonces esta inversa local no puede ser diferenciable.

Teorema 7 (De la Función Implícita.) Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto, $(a, b) \in A$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$ de clase C^1 en A tal que $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Asumamos además las dos condiciones siguientes:

(7.1) $f(a, b) = 0$.

(7.2) $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_{n+1},\ldots,x_{n+m})}(a, b) \neq 0$.

Entonces, existen $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$, y una única función $g : \mathrm{B}(a, r_1) \to \mathrm{B}(b, r_2)$

diferenciable tal que $g(a) = b$ y $f(x, g(x)) = 0$, para todo $x \in \mathrm{B}(a, r_1)$.

Ejemplo 8 Consideremos el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcl} f(x,y,u,v,w) & = & 0 \\ g(x,y,u,v,w) & = & 0 \end{array}\right|$$

(8.1) ¿Bajo qué condiciones es posible despejar x e y en función de u, v y w?

(8.2) Calcular $\frac{\partial x}{\partial u}$.

Ejemplo 9 Sea z dada implícitamente por $z^3 + z^2 y - 7x^2 y^2 z + 2 = 0$ cerca de $(1, 1, 2)$. Dar (si es posible) una solución aproximada para $z(x, y)$ cerca de $(1, 1)$.

Ejercicios propuestos

1. Si $x(\rho, \theta) = \rho \cos(\theta)$ e $y(\rho, \theta) = \rho \operatorname{sen}(\theta)$, demuestre que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \rho$. (Coordenadas polares.)

2. Si $x(\rho, \theta, \phi) = \rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi)$, $y(\rho, \theta, \phi) = \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi)$ y $z(\rho, \theta, \phi) = \rho \cos(\phi)$, demuestre que $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = -\rho^2 \operatorname{sen} \phi$. (Coordenadas esféricas.)

3. Si u y v son funciones diferenciables de x, y y z, las cuales a su vez son funciones diferenciables de r y s, demuestre que

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} + \frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,s)} + \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)} \frac{\partial(z,x)}{\partial(r,s)}.$$

4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface $f'(a) \neq 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que f es inyectiva.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (\mathrm{e}^x \cos(y), \mathrm{e}^x \operatorname{sen}(y))$. Demuestre que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $J_f(x, y) \neq 0$ pero que f no es inyectiva.

6. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables.

(6.1) Establezca condiciones suficientes para que las ecuaciones $x = f(u, v)$ e $y = g(u, v)$ puedan resolverse (u y v en función de x e y) en una vecindad de un punto (a, b). Si $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, demuestre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial u}.$$

(6.2) Calcule $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(1,1)$ y las derivadas parciales de u y v con respecto a x e y en $(0,2)$ cuando $f(u,v) = u^2 - v^2$ y $g(u,v) = 2uv$.

Respuestas: (6.1) Las derivadas parciales de f y g existen y son continuas y $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(a,b) \neq 0$.

(6.2) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(1,1) = 8$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,2) = 1/4$, $\frac{\partial u}{\partial y}(0,2) = 1/4$, $\frac{\partial v}{\partial x}(0,2) = -1/4$ y $\frac{\partial v}{\partial y}(0,2) = 1/4$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, donde $u(x,y) = x^2+x+y$, y $v(x,y) = x^2 + y^2$.

(7.1) Calcule $f'(1,1)$.

(7.2) Determine si f es invertible en una vecindad de $(1,1)$.

(7.3) Si f es invertible, calcule $\frac{\partial x}{\partial v}(3,2)$.

Respuestas: (7.1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. (7.2) Sí. (7.3) -1/4.

8. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(u,v,w) = (u+v+w, u^2+v^2+w^2, u^3+v^3+w^3)$.

(8.1) ¿Es f invertible en una vecindad del punto $(1,2,-1)$?

(8.2) Calcule, si es posible, $\frac{\partial w}{\partial y}(2,6,8)$.

Respuestas: (8.1) Sí. (8.2) $-1/4$.

9. Considere la transformación $u = x^2 + y^2$, $v = 2xy$.

(9.1) Determine el conjunto donde la transformación es invertible.

(9.2) Si se sabe que el punto $(1,2)$ es llevado al punto $(5,4)$ mediante la transformación $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$, encuentre en forma explícita la transformación inversa $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ tal que $x(5,4) = 1$ e $y(5,4) = 2$.

(9.3) Calcule $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(1,2)$ y $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(5,4)$.

Respuestas:
(9.1) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\neq|y|\}$.
(9.2) $x=\frac{1}{2}(\sqrt{u+v}-\sqrt{u-v})$, $y=\frac{1}{2}(\sqrt{u+v}+\sqrt{u-v})$.
(9.3) -12 y $-1/12$, respectivamente.

10. Considere la transformación $u=x^2+xy$, $v=x^2-y^2$.

(10.1) Determine el conjunto donde la transformación es invertible.

(10.2) Encuentre la transformación inversa.

(10.3) Calcule $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(1,1)$ si $x+y>0$.

Respuestas:
(10.1) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq y\}$.
(10.2) $|x+y|=\sqrt{2u-v}$.
(10.3) $-1/2$.

11. Demuestre que la transformación $x=\ln((u+v)^2)$, $y=\sqrt{v}$ es invertible en una vecindad del punto $(2\ln(2),2)$ y encuentre una expresión para la transformación inversa.

Respuesta: $u=\mathrm{e}^{x/2}-y^2$, $v=y^2$.

12. Dado el elipsoide definido por la ecuación $4x^2+3y^2+z^2-12=0$. ¿En qué puntos de la superficie es el plano tangente paralelo al eje z?

Respuesta: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 4x^2+3y^2=12 \text{ y } z=0\}$.

13. Sea $\Phi:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\Phi(x,y,z)=x^2+4y^2-2yz-z^2$.

(13.1) Verifique que Φ satisface las hipótesis del teorema de la Función Implícita en el punto $(2,1,-4)$.

(13.2) Determine la mayor vecindad de $(2,1,-4)$ tal que $\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,y,z)\neq 0$ para todo $(x,y,z)\in V$.

(13.3) Determine la mayor vecindad de $(2,1,-4)$ que no contenga ningún punto crítico de Φ.

Respuestas: (13.2) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+z<0\}$.
(13.3) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+z<0, z<4y, x \neq 0\}$.

14. Sean $u = x+y+z$, $v = x^2+y^2+z^2$ y $w = x^3+y^3+z^3$. Calcule las derivadas parciales de x con respecto a u, v y w por dos métodos, usando jacobianos y derivando implícitamente.

Respuesta: $\frac{yz}{(y-x)(z-x)}$, $\frac{-(z+y)}{2(y-x)(z-x)}$ y $\frac{1}{3(y-x)(z-x)}$, respectivamente.

15. Considere la ecuación $F(x,y) = y^3 - x = 0$.

(15.1) Resuelva la ecuación para y en términos de x.

(15.2) Verifique que $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$.

(15.3) ¿Hay discrepancias entre las partes precedentes?

Respuestas: (15.1) $y = \sqrt[3]{x}$. (15.3) No.

16. Considere la relación $x^2+y^2-z^2-xy = \operatorname{sen}(z)$. Demuestre que se puede despejar z en función de (x,y) en una vecindad del punto $(x,y) = (0,0)$. Calcule además $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$.

Respuesta: 0.

17. Considere la relación $2x^2+3y^2+z^2-12xy+4xz = 35$.

(17.1) Determine si es posible despejar z en función de (x,y) en una vecindad del punto $(x,y) = (0,1)$.

(17.2) Calcule, si es posible, $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ en una vecindad de $(0,1)$.

Respuestas: (17.1) Sí. (17.2) $\frac{6y-2z-2x}{2x+z}$ y $\frac{6x-3y}{2x+z}$, respectivamente.

18. Verifique que la relación $x^2 \ln(y+z) = x+z$ define a z como una función diferenciable de (x,y) en una vecindad del punto $(-2,-1)$, y calcule $\frac{\partial z}{\partial x}(-2,-1)$.

Respuesta: $1/3$.

19. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tal que $f(u+v^2,-u^2+w^3,v-2w^2)=uvw$.

(19.1) Determine condiciones suficientes para que existan vecindades V de 1 y W de $(2,0)$ de modo que u sea función de (v,w) y $(u,(v,w))\in V\times W$.

(19.2) Si $\frac{\partial f}{\partial x}(5,-1,2)=-1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(5,-1,2)=1$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(5,-1,2)=3$, calcule $\frac{\partial u}{\partial v}(2,0)$.

Respuestas: (19.1) f de clase C^1, $f(5,-1,2)=0$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(5,-1,2)\neq 2\frac{\partial f}{\partial x}(5,-1,2)$.

(19.2) $-1/3$.

20. Sea $\Phi=\Phi(u,v)$ una función de clase C^1 tal que $\Phi(4,5)=9$ y para todo $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}(\alpha,\alpha+1)=9=3\frac{\partial\Phi}{\partial v}(\alpha,\alpha+1).$$

Suponga que $2x-xy+xz^2=\Phi(x+z,y+xz)$.

(20.1) Verifique que es posible despejar z en función de (x,y) en una vecindad del punto $(1,2)$ de manera tal que $z(1,2)=3$.

(20.2) Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)$.

Respuesta: (20.2) $-3/2$.

21. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función diferenciable y suponga que la relación $xyz=f(x^2+y^2-2z)$ define a z como función de x e y. Encuentre el valor de k de modo que $x(y^2+z)\frac{\partial z}{\partial x}-y(x^2+z)\frac{\partial z}{\partial y}=kz(y^2-x^2)$.

Respuesta: -1.

22. Considere la relación $x^3+4xy+z^2-2yz=0$.

(22.1) Determine si es posible despejar z en función de (x,y) en una vecindad del punto $(2,-1)$ de modo que $z(2,-1)=0$.

(22.2) Calcule (si existen) $\frac{\partial z}{\partial x}(2,-1)$ y $\frac{\partial z}{\partial y}(2,-1)$.

(22.3) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(2,-1,0)$.

Respuestas: (22.1) Sí. (22.2) -4 y -4. (22.3) $4x+4y+z=4$.

23. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(1)=0$.

(23.1) Determine condiciones sobre f para que la ecuación $2f(xy)=f(x)+f(y)$ se pueda resolver para y en términos de x en una vecindad de $(1,1)$.

(23.2) Resuelva la ecuación en forma explícita si $f(t)=t^2-1$.

Respuestas: (23.1) f derivable y $f'(1)\neq 0$. (23.2) $y=x/\sqrt{2x^2-1}$.

24. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $f(0,0)=0$. Determine condiciones sobre f para que la ecuación $f(f(x,y),y)=0$ se pueda resolver para y en términos de x en una vecindad de $(0,0)$.

Respuesta: f de clase C^1 y $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\neq 0$.

25. Considere el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcl} xyz+\operatorname{sen}(xyz) & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \end{array}\right\rfloor .$$

Determine si es posible definir x e y en función de z en una vecindad de 1, de modo que $x(1)=-1$ e $y(1)=0$.

Respuesta: Sí.

26. Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que $f(1)=g(1)=0$. Determine condiciones sobre f y g para que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} f(xy)+g(yz) & = & 0 \\ g(xy)+f(yz) & = & 0 \end{array}\right\rfloor$$

pueda resolverse para y y z en términos de x en una vecindad de $(1,1,1)$.

Respuesta: f y g derivables, $f'(1) \neq -g'(1)$ y $f'(1) \neq g'(1)$.

27. El punto $(1, -1, 2)$ está situado sobre las dos superficies definidas por las ecuaciones $x^2(y^2 + z^2) = 5$ y $(x - z)^2 + y^2 = 2$. Demuestre que en una vecindad de dicho punto, la curva formada por la intersección de las superficies se puede definir por medio de un par de ecuaciones de la forma $z = f(x)$ e $y = g(x)$.

28. Sea $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función positiva de clase C^1. Demuestre que la ecuación $z^3 + p(x, y)z = 15$ posee una solución $z = f(x, y)$ positiva única.

29. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1. Suponga además que $f(x, y, z) = 0$ y $g(x, y, z) = 0$ definen dos superficies que se intersectan en una curva. Demuestre que un vector tangente a esta curva está dado por

$$\left(\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}\right).$$

6. Máximos y mínimos

Notación 1 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase C^p en D. Anotaremos

(1.1) $(x \bullet \nabla)f = x \bullet \nabla f$ y

(1.2) $(x \bullet \nabla)^k f = (x \bullet \nabla)(x \bullet \nabla)^{k-1} f$, si $1 < k \leq p$.

También anotaremos

(1.3) $(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n})^k f = (x \bullet \nabla)^k f$.

Ejemplo 2 Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que para todo $z \in \mathbb{R}^n$, $(x \bullet \nabla)^2 f(z) = [x]^t H(z)[x]$, donde $[x]$ denota la matriz de coordenadas de x en la base canónica y $H(z) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}; 1 \leq i, j \leq n)$.

Definición 3 La matriz $H(z)$ en el ejemplo precedente se conoce como matriz Hessiana de f en z.

Nota 4 Dado un vector $x \in \mathbb{R}^n$, se acostumbra identificar x con su matriz (columna) de coordenadas $[x]$. Haciendo uso de esta identificación, la identidad en Ejemplo 2

puede expresarse como $(x \bullet \nabla)^2 f(z) = x^{\mathrm{t}} H(z) x$.

Notación 5 Sean u y v vectores de $\mathbb{R}^n$. Anotaremos

(5.1) $[u, v] = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in [0,1], x = tu + (1-t)v\}$.

Teorema 6 (Taylor.) Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase C^p en D, y $x, a \in D$ tal que $[x, a] \subseteq D$. Entonces,

(6.1) $f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(x-a)\bullet\nabla)^k f(a)}{k!} + R_p$, donde $R_p = \frac{((x-a)\bullet\nabla)^k f(\theta)}{p!}$ con $\theta \in [x, a]$. El desarrollo de f mediante (6.1) se conoce como desarrollo de Taylor de f de orden p en a.

Ejemplo 7 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y}$. Determinar el desarrollo de Taylor de f de orden p en $(0, 0)$.

Observación 8 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en D, y $x, a \in D$ tal que $[x, a] \subseteq D$. Entonces, por Teorema de Taylor se tiene que existe $\theta \in [x, a]$ tal que

(8.1) $f(x) = f(a) + (x-a) \bullet \nabla f(a) + \frac{((x-a)\bullet\nabla)^2 f(\theta)}{2}$.

Definiciones 9 Sean $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a \in D$. Se dice que

(9.1) f tiene un máximo absoluto en a, si y sólo si, para todo $x \in D$, $f(a) \geq f(x)$.

(9.2) f tiene un máximo relativo en a, si y sólo si, existe $\delta > 0$ tal que la restricción de f al conjunto $D \cap \mathrm{B}(a, \delta)$ tiene un máximo absoluto en a.

Definiciones análogas existen para mínimos absolutos y relativos.

Ejemplo 10 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \|x\|$. Luego, f tiene un mínimo absoluto en 0.

Teorema 11 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $a \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}$ diferenciable en a. Si f tiene un extremo relativo en a, entonces $\nabla f(a) = 0$.

Definición 12 Sea H una matriz real y simétrica de orden $n \times n$. Se dice que H es definida positiva, si y sólo si,

(12.1) para todo $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\eta^{\mathrm{t}} H \eta > 0$.

Teorema 13 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en D, y $a \in D$ tal que $\nabla f(a) = 0$.

(13.1) Si $H(a)$ es definida positiva, entonces f tiene un mínimo relativo en a.

(13.2) Si $-H(a)$ es definida positiva, entonces f tiene un máximo relativo en a.

Nota 14 Sea $H = (h_{ij}; 1 \leq i, j \leq n)$ una matriz real y simétrica de orden $n \times n$. Entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes:

(14.1) H es definida positiva.

(14.2) Para todo $m \leq n$,

$$\det \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mm} \end{pmatrix} > 0.$$

(14.3) Todos los valores propios de H son estrictamente positivos.

Observación 15 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en D. En este caso, para todo $a \in D$, $H(a)$ es una matriz de orden 2×2. En efecto,

(15.1) $$H(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Para simplificar las notaciones anotemos $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$ y $C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$. Luego,

$$H(a) = \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}.$$

Sigue de Nota 14 que $H(a)$ es definida positiva, si y sólo si,

(15.2) $A > 0$ y $AB - C^2 > 0$.

Análogamente, $-H(a)$ es definida positiva, si y sólo si,

(15.3) $A < 0$ y $AB - C^2 > 0$.

Por lo tanto, si $\nabla f(a) = 0$, entonces f tendrá un mínimo o un máximo relativo,

según se cumpla o no, (15.2) o (15.3), respectivamente.

Si no se satisface alguna de las condiciones (15.2) o (15.3), es decir si $AB - C^2 \leq 0$, entonces se dice que f tiene un punto silla en a.

Ejemplo 16 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. Analizar los puntos críticos de f.

Observación 17 Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funciones diferenciables y supongamos que estamos interesados en maximizar $f(x_1, \ldots, x_n)$ sujeto a la condición $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Este problema es equivalente a maximizar la restricción $f_{|R}$ de f al conjunto $R = g^{-1}(\{0\})$. El siguiente teorema proporciona un criterio para encontrar extremos relativos de $f_{|R}$.

Teorema 18 (Multiplicadores de Lagrange.) Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $a \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ diferenciable, $g : D \to \mathbb{R}^m$ de clase C^1 en D y $R = g^{-1}(\{0\})$. Supongamos que se satisface las dos condiciones siguientes:

(18.1) La restricción $f_{|R}$ de f a R tiene un extremo en a.

(18.2) $\mathrm{D}g(a) \neq 0$.

Entonces, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tal que $f'(a) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)g'(a)$.

Ejemplos 19

(19.1) Sea $f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = x + y + z$. Determinar (si existen) los valores extremos de f.

(19.2) Sea $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Calcular el punto de la parábola de ecuación $y = x^2$ más cercano al punto $(0, c)$.

(19.3) Encontrar los valores extremos de $f(x, y, z) = xy + yz$, sujeto a las restricciones $x^2 + y^2 = 2$ e $yz = 2$.

(19.4) Determinar las dimensiones de la caja rectangular con mayor volumen que se puede inscribir en el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Ejercicios propuestos

1. Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y conexo, y $f : D \to \mathbb{R}$ diferenciable. Demuestre

que si todas las derivadas parciales se anulan en D, entonces f es constante.

2. Determinar los puntos críticos de las funciones siguientes y la naturaleza de ellos:

(2.1) $f(x, y) = x^3 + 12xy + y^3 + 5$. (2.2) $f(x, y) = -\frac{xy}{8} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$.

Respuestas: (2.1) $(0, 0)$ punto silla y $(-4, -4)$ máximo.
(2.2) $(2, -2)$ máximo.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = (x^2 + y^2)\exp[-(x^2 + y^2)]$.

(3.1) Encuentre los valores extremos de f.

(3.2) ¿Tiene f puntos silla?

Respuestas: (3.1) 0 mínimo absoluto en $(0, 0)$ y
e^{-1} máximo absoluto en $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ si $u^2 + v^2 = 1$.
(3.2) No.

4. Sean $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}^n$. Encuentre el mínimo de la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sum_{k=1}^{r} \|x - a_k\|^2$.

Respuesta: $\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} a_k$.

5. Encontrar los extremos absolutos de las funciones siguientes:

(5.1) $f(x, y) = x^2 + 12xy + y^2$, sobre $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$.

(5.2) $f(x, y) = \sqrt{(6 - x)(6 - y)(x + y - 6)}$, sobre el triángulo limitado por las rectas de ecuaciones $x = 6$, $y = 6$ y $x + y = 6$.

Respuestas: (5.1) Su máximo es 28 y su mínimo -20.
(5.2) Su máximo es $2\sqrt{2}$ y su mínimo 0.

6. Sean $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 4x^2+9y^2-x^2y^2$.

(6.1) Identifique extremos relativos de f.

(6.2) Identifique extremos absolutos de f.

(6.3) Determine (si existen) puntos silla de f.

Respuestas: (6.1) Mínimos relativos en $(0,0)$, $(2,0)$ y $(-2,0)$.
Máximos relativos en $(0,2)$ y $(0,-2)$.
(6.2) Mínimo absoluto en $(0,0)$.
(6.3) No hay.

7. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$. Demuestre que f tiene un punto silla en $(0,0)$ y que sin embargo, f tiene un mínimo en $(0,0)$ sobre cualquier recta que pase por el origen.

8. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = xy$. Encuentre el máximo y mínimo absoluto que alcanza f sobre la elipse de ecuación $x^2+y^2+xy = 4$.

Respuesta: $4/3$ y -4, respectivamente.

9. Sea $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2+z^2 = z\}$. Encuentre el máximo valor de la función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$.

Respuesta: $\sqrt{2}$.

10. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$. Encuentre el máximo y el mínimo valor de la función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xy^2$.

Respuesta: $4\sqrt{3}$ y $-4\sqrt{3}$.

11. Sea $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0, y + z = 0\}$. Encuentre el máximo valor de la función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2 + 2y - z^2$.

Respuesta: -3/2.

12. Encontrar las dimensiones del paralelepípedo rectangular de mayor volumen con tres de sus caras en los planos coordenados y un vértice sobre el plano $x+3y+2z = 6$ si x, y y z son positivas.

Respuesta: 2, 2/3 y 1.

13. Encontrar el punto más cercano al origen sobre la línea de intersección de los dos planos $2x + 3y + z = 6$ y $x + 2y + 2z = 4$.

Respuesta: $(12/13, 17/13, 3/13)$.

14. Calcule el punto de la recta que pasa por $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$, y que está más cerca de la recta $x = t$, $y = t$ y $z = t$.

Respuesta: $(1/2, 1/2, 0)$.

15. Determine la distancia desde el origen al plano de ecuación $3x + 5y + 6z = 30$.

Respuesta: $3\sqrt{70}/7$.

16. Determine la distancia desde el origen a la curva de ecuación $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

Respuesta: 1.

17. Calcule las dimensiones de una caja rectangular sin tapa, de modo que su volumen sea 256 cm^3 y su área sea máxima.

Respuesta: 8, 8, y 4.

18. Se desea construir un depósito cilíndrico de 90 m^3 de capacidad. Si la tapa del fondo tiene un costo de \$3,000.– el m^2, la tapa superior de \$2,000.– el m^2 y la pared lateral de \$1,500.– el m^2, determine las dimensiones del depósito de modo que su costo sea mínimo. Además, determine dicho costo.

Respuesta: Altura $6,83$ mts y radio $2,05 mts$. Costo $135{,}000\sqrt[3]{\pi}$.

19. Un cohete consume combustible según su ubicación en el espacio tridimensional y de acuerdo a la función $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$. Si el cohete se mueve sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, determine el máximo consumo de combustible posible.

Respuesta: $r^6/27$.

20. De la Mecánica Cuántica se sabe que la energía correspondiente al estado fundamental de una partícula de masa m confinada en una caja rectangular de lados x, y y z, viene dada por la fórmula

$$E(x, y, z) = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right),$$

donde h es la constante de Planck.

(20.1) ¿Qué relación deben satisfacer x, y y z para que a volumen constante la energía de la partícula confinada en la caja sea mínima?

(20.2) ¿Cuál es la energía mínima a volumen constante igual V?

Respuestas: (20.1) $|x| = |y| = |z|$. (29.2) $3h^2/8m\sqrt[3]{V^2}$.

21. Una placa circular delgada tiene la forma del disco de ecuación $x^2 + y^2 \leq 1$. Si se calienta de modo que en cada punto (x, y) su temperatura está dada por $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$, localice los puntos, más calientes y más fríos, y determine la temperatura en dichos puntos.

Respuesta: Temperatura mínima $-1/4$ en $(1/2, 0)$ y temperatura máxima $9/4$ en $(-1/2, 3/2)$ y $(-1/2, -3/2)$.

22. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^k + \cdots + x_n^k$. Demuestre que un extremo relativo de f sujeto a la condición $x_1 + \cdots + x_n = a$ es $a^k n^{1-k}$.

23. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ y $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(23.1) Demuestre que el máximo de f sobre $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = \rho^2\}$ es $(\rho^2/3)^3$.

(23.2) Demuestre que el mínimo de g sobre $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (\rho^2/3)^3\}$ es ρ^2.

(23.3) Generalice lo demostrado en los dos puntos anteriores para deducir así que $(a_1 \cdots a_n)^{1/n} = (a_1 + \cdots + a_n)/n$ si $a_1, \ldots, a_n \geq 0$.